9/11/2017

Μάθημα 9ο

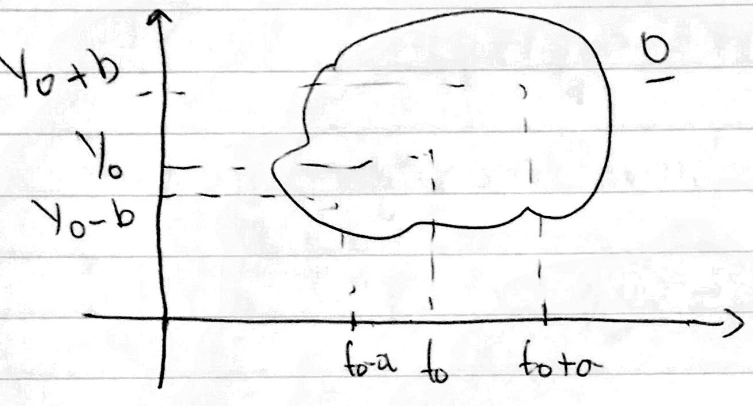
Ύπαρξη και μοναδικότητα

$$y' = f(t,y) \quad , \; y(t_0) = y_0 \quad (C_0)$$

Θεώρημα 1.

Ας είναι $a, b > 0$ και

$$R = \{ (t,y) : |t - t_0| \le a \; , \; |y - y_0| \le b \} \subseteq D_f$$



Αν η f είναι συνεχής στο R και K-Lipschitz στο R τότε υπάρχει ακριβώς μια λύση y του Π.Α.Τ. (E)-(C_0) που ορίζεται στο $I = [t_0 - r, t_0 + r]$ όπου $r = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ με $M = \sup_R f(t,y)$

{εάν $M = 0$ τότε $r = a$}

Επιπλέον, η λύση y είναι το όριο της ακολουθίας (φ_ν) με:

$$\varphi_0(t) = y_0$$

$$\varphi_{\nu+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_\nu(s))\, ds \quad (\text{Picard})$$

και ισχύει:

$$|\varphi_\nu(t) - y(t)| \le \boxed{\frac{M}{K} \frac{(Kr)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} e^{Kr}} \quad , \; t \in I.$$

εξαρτάται μόνο από τα K, r (ίδια της f)

Παράδειγμα 2 σελ 23

$$y' = \underbrace{x^2 + y^2}, \quad y(0) = 0$$

Είναι $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

ας είναι $a, b > 0$ και $R = \{(x,y) : |x-0| \leq a, |y-0| \leq b\}$
Η f είναι συνεχής στο R
με μερική παράγωγο $f_y(x,y) = 2y$

είναι: $\sup_R |f_y(x,y)| = \sup_R |2y| = 2b \ (=K)$

μερική παράγωγος → φραγμένη

$$M = \sup_R |f(x,y)| = \sup_R (x^2 + y^2) = a^2 + b^2$$

Από το Θεώρημα 1 έπεται ότι το Π.Α.Τ. έχει ακριβώς μία λύση στο $I = [-r, r]$ όπου $r = \min\{a, \frac{b}{M}\} =$

$$= \min\left\{a, \frac{b}{a^2 + b^2}\right\}$$

!

$$\frac{b}{a^2+b^2} \leq \frac{b}{2ab}$$ Από ταυτότητα

$$\frac{b}{a^2+b^2} \leq \frac{\cancel{b}}{2a\cancel{b}} = \boxed{\frac{1}{2a}}$$ μέγιστη τιμή

$\Downarrow$

$\boxed{a = b}$ $\longleftarrow$ τότε μέγιστο διάστημα

$\Downarrow$

$$\boxed{a = \frac{1}{2a}} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Άρα $\min\left\{a, \frac{1}{a}\right\}$

όταν $a \to 0$ $\quad \frac{1}{a} \to \infty$

όταν $\frac{1}{a} \to 0$ $\quad a \to \infty$

Δε μας συμφέρει

άρα τα παίρνουμε ίσα

Συνήθως το $\frac{b}{a^2+b^2}$ θα είναι συνάρτηση 2 μεταβλητών. Άρα θα πηγαίναμε να βρούμε το μέγιστο αυτής της συνάρτησης

Για να βρω την ακολουθία Picard:

$$\varphi_0(t) = 0 \quad , \quad t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = I$$

$$\varphi_1(t) = 0 + \int_0^t f(s, \varphi_0(s))\,ds \quad , \quad t \in I.$$

$$= \int_0^t (s^2 + 0^2)\,ds = \frac{t^3}{3}$$

$$\varphi_2(t) = \int_0^t \left(s^2 + \left(\frac{s^3}{3}\right)^2\right) ds = \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{97}$$

$$|\varphi_v(t) - y(t)| \leq \frac{M}{K} \frac{(Kr)^{v+1}}{(v+1)!} e^{Kr}$$

για $m = 1$, $K = 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow K = \sqrt{2}$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Παράδειγμα 3 σελ 24

$y' = x + y^2 \qquad y(0) = 0$

έχει ακριβώς μία λύση στο $\boxed{[-1/2, 1/2]}$

Να βρεθεί μία προσέγγιση $\rightarrow \frac{1}{10}$

Μου δίνει το διάστημα $\Rightarrow a = 1/2$

$b > 0$ // $f(x,y) = x + y^2$, συνεχής στο $\mathbb{R}^2$
έχει μερ. παράγωγο.

$R = \{ (x,y) : |x - 0| \leq \frac{1}{2}, \ |y - 0| \leq b \}$

$M = \sup_R |f(x,y)| = \max_R |x^2 + y^2| = \frac{1}{2} + b^2$

$\boxed{K = \sup_R \frac{\partial f}{\partial y}} = \sup_R |2y| = 2b$

$r = \min\left\{ \frac{1}{2}, \frac{b}{a^2+b^2} \right\}$

Το μικρότερο θέλουμε να είναι το $1/2$

Άρα θα πρέπει: $\boxed{\frac{b}{a^2+b^2} \geq \frac{1}{2}}$

Επομένως θα πρέπει να βρω τα b που θα το ικανοποι.

$\frac{1}{2} \leq \frac{b}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{1}{2} + b^2 \leq 2b \Rightarrow b^2 - 2b + \frac{1}{2} \leq 0$

$\Rightarrow \ldots \ b_{1,2} = \ldots$

$b = 1 \longrightarrow r = 1/2$

$$M = \frac{1}{2} + 1^2 = \frac{3}{2}$$

$$\kappa = 2 \cdot 1 = 2$$

$$|\varphi_\nu(t) - \varphi(t)| = \frac{3/2}{2} \frac{(1)^{\nu+1}}{(r+1)!} e^1 =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{e}{(\nu+1)!} < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot e \cdot 10 \leq (\nu+1)!$$

Με την άλλη ρίζα : $y(x) - \tilde{y}(x) \leq \frac{10 - 7\sqrt{2}}{24} e^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

(πιο βέβαιο)

$$\varphi_0(t) = 0$$

$$\varphi_1(t) = 0 + \int_0^t (s + 0^2)\, ds = \frac{t^2}{2}$$

$$\varphi_2(t) = 0 + \int_0^t \left(s + \left(\frac{s^2}{2}\right)^2\right) ds =$$

$$= \int_0^t \left(s + \frac{s^4}{4}\right) ds = \frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{20}$$

Ασκηση 3ι σελ 28

$$y' = y^2 + \cos x \quad , \quad I = [-1/2, 1/2] \quad , \quad y(0) = 0$$

$$f(x,y) = y^2 + \cos x \quad , \quad R = [-1/2, 1/2] \times [-b, b] \quad b > 0$$

$$M = \sup_R |f(x,y)| = b^2 + 1.$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \sup_R |2y| = 2b = K$$

$$r = \min\left\{ 1/2 \, , \, \frac{b}{b^2+1} \right\} \rightsquigarrow b = 1$$

$$M = 2 \, , \quad K = 2 \, , \quad r = 1/2$$

$$\varphi_0(t) = 0$$

$$\varphi_1(t) = \int_0^t (0^2 + \cos s)\, ds = \sin t$$

$$\varphi_2(t) = \int_0^t (\sin^2 t + \cos t)\, dt$$

Άσκηση 3iii

$$y' = y^3 + e^{-5t} \qquad \boxed{y(0) = 2/5} \quad , \quad I = \left[-\frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right]$$

Δεν είναι το κέντρο το (0,0) εδώ

$$\Downarrow$$

$$\left|y - \underbrace{\frac{2}{5}}_{y_0}\right| \le b.$$

Άρα: $f(t,y) = y^3 + e^{-5t}$, $b > 0$

$$R = \left[-\frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right] \times \left[\frac{2}{5} - b, b + \frac{2}{5}\right]$$

$$M = \sup_R |f(t,y)| = \sup_R |y^3 + e^{-5t}| =$$

$$= \left(b + \frac{2}{5}\right)^3 + e^{-5(-3/10)}$$

Θέλουμε να γίνει μέγιστο

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 3y^2 \le 3\left|b + \frac{2}{5}\right|^2$$

$= \sup \longrightarrow (\ldots)$

Θεώρημα 2

Ας είναι $a > 0$ και :

$$S = \{(t,y) : |t-t_0| \leq a,\ y: \text{αυθαίρ.}\} \subseteq D_f$$

αν η f είναι συνεχής στο S και k-Lipshitz στο S τότε υπάρχει ακριβώς μία λύση y του Π.Α.Τ. (E)-(C₀) που ορίζεται στο $I = [t_0-a, t_0+a]$

όπου $M = \sup_{t \in I} |f(t, y_0)|$.

Παράδειγμα

$$y' = e^{-y^2} + \sqrt{1-x^2}, \quad y(0) = 1 \qquad x \in [-1,1]$$

$$f(x,y) = e^{-y^2} + \sqrt{1-x^2}$$

$$S = [-1,1] \times \mathbb{R}.$$

$$\sup_S \left|\frac{df}{dy}\right| = \sup_S \left|-2y e^{-y^2}\right| = \sup_S \frac{2|y|}{e^{|y|^2}} =$$

$$= \sup_S \frac{2u}{e^{u^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = k.$$

$$g(u) = 2u e^{-u^2}, \quad u \geq 0$$

$$\lim_{u \to \infty} g(u) = 0, \quad g(0) = 0$$

$$g'(u) = 2e^{-u^2}$$

(...)

Παράδειγμα 7 σελ 87

$y' = 3xy^{1/3}$, $y(0) = 0$

Βρίσκουμε $\rightarrow$ $y_1(x) = x^3$ | $f(x,y) = 3xy^{1/3}$

$y(x) = 0$

έχουμε πάνω από μία λύσεις.
Δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες

για $y(0) = b$.

Στο 1 είναι παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz $\Rightarrow$ έχει λύση.

(...)

(επέκταση λύσης)

Θεώρημα

Ας είναι I : διάστημα και $E := \{(x,y) : x \in I, y \in \mathbb{R}\}$

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο I και για οποιοδήποτε J συμπαγές υποδιάστημα του I, υπάρχει $K_J > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι

K_J-Lipschitz στο $E_J : \{x \in J : y \in \mathbb{R}\}$

Τότε το Π.Α.Τ. έχει ακριβώς μία λύση.

(Παράδειγμα 5 σελ 25)

Άσκηση 5 σελ 28

$$y' = \frac{\cos y}{1-x^2}, \quad y(0) = 2$$
$$-1 < x < 1$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \sup_E \left|\frac{-\sin y}{1-x^2}\right| = \frac{1}{1-\max\{|a|,|b|\}}$$